トレース不等式から見た不確定性関係II (関数空間の深化とその周辺)

AUTHOR(S):
柳, 研二郎

数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 157-170

トレース不等式から見た不確定性関係II

柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)

城西大学理学部 (Faculty of Science, Josai University)

1 Introduction

量子力学で有名な不確定性関係は，Heisenberg や Schrödinger によって発見された．それらはほとんど Schwarz's inequality を使う関係で積型のものであった．最近和型の不確定性関係が多く出されてきている．([1],[2],[11] など)．今まではエントロピーについての和型不確定性関係が得られていたのみで，他には全くと言っていいほど積型以外のものはなかった．

Proposition 1.1 物理量 A, B が次のスペクトル分解をもつとする．

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \qquad B = \sum_{j=1}^{n} \mu_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|.$$

任意の量子状態 $|\varphi\rangle$ に対して，次の 2 つの確率分布を定義する．

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n), \qquad Q = (q_1, q_2, \dots, q_n),$$

ただし

$$p_i = |\langle\phi_i|\varphi\rangle|^2, \qquad q_j = |\langle\psi_j|\varphi\rangle|^2.$$

それらの *Shannon entropy* を $H(P), H(Q)$ とする．

$$H(P) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i, \qquad H(Q) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \log q_i,$$

このとき次の和型不確定性関係が成り立つ．

$$H(P) + H(Q) \geq -2 \log c,$$

ただし $c = \max_{i,j} |\langle\phi_i|\psi_j\rangle|$ である．

Definition 1.1 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ の *Fourie* 変換を

$$\hat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

で定義する．また $Q(\mathbb{R})$ を次のように定義する．

$$Q(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}); \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

このとき次が成り立つ．

Proposition 1.2 $\psi \in L^2(\mathbb{R}),\ \|\psi\|^2 = 1$ で $\psi, \hat{\psi} \in Q(\mathbb{R})$ が成り立つならば

$$S(\psi) + S(\hat{\psi}) \geq \log \frac{e}{2}$$

が成り立つ．ただし

$$S(\psi) = -\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 \log |\psi(t)|^2 dt, \quad S(\hat{\psi}) = -\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(t)|^2 \log |\hat{\psi}(t)|^2 dt.$$

Definition 1.2 $M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 複素行列全体、 $M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ エルミート行列全体，$M_{n,+}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 正定値複素行列全体，$M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ 密度行列全体とする． また $M_n(\mathbb{C})$ 上の *Hilbert-Schmidt inner product* は次のように定義される．

$$(A, B)_{HS} = Tr(A^* B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} b_{ij},$$

ただし $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ とする．$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して *left multiplicative operator* と *right multiplicative operator* を次のように定義する．

$$L_A(X) = AX, \quad R_A(X) = XA, \quad (X \in M_n(\mathbb{C})).$$

Definition 1.3 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ は次の条件を満たすとき，作用素単調関数 *(operator monotone function)* という．

$$A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C}), \quad 0 \leq A \leq B \Longrightarrow 0 \leq f(A) \leq f(B)$$

作用素単調関数 f は $f(x) = x f(x^{-1})$ を満たすとき対称 *(symmetric)*, $f(1) = 1$ を満たすとき *normarized* という． また *symmetric normarized operator monotone function* の全体を $\mathcal{F}_{op}$ とする．

Example 1.1

$$f_{RLD}(x) = \frac{2x}{x+1}, \quad f_{SLD}(x) = \frac{x+1}{2},$$
$$f_{BKM}(x) = \frac{x-1}{\log x}, \quad f_{WY}(x) = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{2}\right)^2,$$
$$f_{WYD}(x) = \alpha(1-\alpha)\frac{(x-1)^2}{(x^\alpha - 1)(x^{1-\alpha}-1)}, \ \alpha \in (0,1).$$

$f \in \mathcal{F}_{op}$ に対しては $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ とおく．regular function と non-regular function はそれぞれ次のように定義される．

$$\mathcal{F}_{op}^r = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) \neq 0\}, \qquad \mathcal{F}_{op}^n = \{f \in \mathcal{F}_{op} | f(0) = 0\}.$$

Definition 1.4 ([4],[7]) $f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left\{(x+1) - (x-1)^2 \frac{f(0)}{f(x)}\right\}, \quad x > 0.$$

と定義する．

Example 1.2

$$\tilde{f}_{WY}(x) = \sqrt{x}, \quad \tilde{f}_{WYD}(x) = \frac{x^\alpha + x^{1-\alpha}}{2}, \quad \tilde{f}_{SLD}(x) = \frac{2x}{x+1}.$$

Proposition 1.3 ([4],[5]) $f \to \tilde{f}$ は $\mathcal{F}_{op}^r$ と $\mathcal{F}_{op}^n$ の間の 1 対 1 対応を与える．

Kubo-Ando 理論 ([10]) より，matrix mean m_f は operator monotone function と次の関係で結びつけられる．
$f \in \mathcal{F}$ に対して
$$m_f(A,B) = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2},$$
ただし $A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$. そこで monotone metrics を次のように定義することができる．
$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \in M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ に対して

$$\langle X, Y\rangle_f = Tr[X^* m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1} Y], \quad X, Y \in M_n(\mathbb{C}),$$

ただし
$$m_f(L_\rho, R_\rho)^{-1} = \sum_{i,j} m_f(\lambda_i, \lambda_j)^{-1} L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|} R_{|\phi_j\rangle\langle\phi_j|}$$

と表されることに注意する．

2 Generalized Quasi-metric adjusted skew information

$g, f \in \mathcal{F}_{op}^r$ に対して次の条件 (A) を与える.

$$g(x) \geq k\frac{(x-1)^2}{f(x)}, \text{ for some } k > 0.$$

このとき

$$\Delta_g^f(x) = g(x) - k\frac{(x-1)^2}{f(x)} \in \mathcal{F}_{op}.$$

とおく. さらに次の条件 (B) も考える.

$$g(x) + \Delta_g^f(x) \geq \ell f(x) \text{ for some } \ell > 0.$$

Definition 2.1 $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次を定義する.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) &= k\langle (L_A - R_B)X, (L_A - R_B)Y\rangle_f \\
&= kTr[X^*(L_A - R_B)m_f(L_A, R_B)^{-1}(L_A - R_B)Y] \\
&= Tr[X^* m_g(L_A, R_B)Y] - Tr[X^* m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y],
\end{aligned}$$

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,X),$$

$$\Psi_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) = Tr[X^* m_g(L_A, R_B)Y] + Tr[X^* m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)Y],$$

$$J_{A,B}^{(g,f)}(X) = \Psi_{A,B}^{(g,f)}(X,X),$$

$$U_{A,B}^{(g,f)}(X) = \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot J_{A,B}^{(g,f)}(X)},$$

ただし

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|, \quad B = \sum_{j=1}^n \mu_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

に対して

$$m_f(L_A, R_B)^{-1} = \sum_{i,j} m_f(\lambda_i, \mu_j)^{-1} L_{|\phi_i\rangle\langle\phi_i|} R_{|\psi_j\rangle\langle\psi_j|}$$

と表されることに注意する.

次の結果が得られている.

Theorem 2.1 ([20]) 条件 *(A)* の下で次の *(1), (2)* が成り立つ.

(1) $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次の積型不確定性関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} I_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot I_{A,B}^{(g,f)}(Y) &\geq |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)|^2 \\ &\geq \frac{1}{16}(I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y))^2. \end{aligned}$$

(2) $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対してもし条件 *(B)* が成り立てば次の積型不確定性関係が成り立つ.

(a) $U_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq k\ell |Tr[X^* |L_A - R_B| Y]|^2.$

(b) $U_{A,B}^{(g,f)}(X) \cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \dfrac{f(0)^2 \ell}{k} |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)|^2.$

Proof (1) 第 1 の不等式は [19] で示しているでの，第 2 の不等式のみ示す.

$$\begin{aligned} & I_{A,B}^{(g,f)}(X \pm Y) \\ = \ & Tr[(X^* \pm Y^*) m_g(L_A, R_B)(X \pm Y)] - Tr[(X^* \pm Y^*) m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B)(X \pm Y)]. \end{aligned}$$

よって次を得る.

$$\begin{aligned} & I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y) \\ = \ & 2Tr[X^* m_g(L_A, R_B) Y] + 2Tr Y^* m_g(L_A, R_B) X] \\ & -2Tr[X^* m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B) Y] - 2Tr[Y^* m_{\Delta_g^f}(L_A, R_B) X] \\ = \ & 2\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) + 2\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(Y,X) \\ = \ & 4Re\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)\}. \end{aligned}$$

同様にして

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) + I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y) = 2(I_{A,B}^{(g,f)}(X) + I_{A,B}^{(g,f)}(Y)).$$

よって次を得る.

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,B}^{g,f)}(X,Y) &= Re\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)\} + iIm\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)\} \\ &= \frac{1}{4}(I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y)) + iIm\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y). \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} |\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)|^2 &= \frac{1}{16}(I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y))^2 + (Im\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)\})^2 \\ &\geq \frac{1}{16}(I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y) - I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y))^2, \end{aligned}$$

(2) (a) は [19] で示されているので (b) のみ示す．[3] の Lemma 3.3 と Lemma 3.4 より

$$m_g(x,y)^2 - m_{\Delta_g^f}(x,y)^2 \geq k\ell(x-y)^2 \geq k\ell\frac{f(0)^2}{k^2}(m_g(x,y) - m_{\Delta_g^f}(x,y))^2.$$

よって

$$m_g(x,y) + m_{\Delta_g^f}(x,y) \geq \frac{f(0)^2\ell}{k}(m_g(x,y) - m_{\Delta_g^f}(x,y)).$$

したがって

$$\begin{aligned} J_{A,B}^{(g,f)}(Y) &= \sum_{i,j}\{m_g(\lambda_i,\mu_j) + m_{\Delta_g^f}(\lambda_i,\mu_j)\}|\langle\phi_i|Y|\psi_j\rangle|^2 \\ &\geq \frac{f(0)^2\ell}{k}\sum_{i,j}\{m_g(\lambda_i,\mu_j) - m_{\Delta_g^f}(\lambda_i,\mu_j)\}|\langle\phi_i|Y|\psi_j\rangle|^2 \\ &= \frac{f(0)^2\ell}{k}I_{A,B}^{(g,f)}(Y). \end{aligned}$$

(1) の第 1 の不等式より

$$|\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y)|^2 \leq I_{A,B}^{(g,f)}(X)\cdot I_{A,B}^{(g,f)}(Y) \leq I_{A,B}^{(g,f)}(X)\cdot\frac{k}{f(0)^2\ell}J_{A,B}^{(g,f)}(Y).$$

よって

$$I_{A,B}^{(g,f)}(X)\cdot J_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \frac{f(0)^2\ell}{k}|\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X.Y)|^2.$$

同様にして

$$J_{A,B}^{(g,f)}(X)\cdot I_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \frac{f(0)^2\ell}{k}|\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X.Y)|^2.$$

したがって結果を得る． □

3 和型不確定性関係

Theorem 3.1 $X, Y \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して，次が成り立つ．

(1) $I_{A,B}^{(g,f)}(X) + I_{A,B}^{(g,f)}(Y) \geq \frac{1}{2}\max\{I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y), I_{A,B}^{(g,f)}(X-Y)\}.$

(2) $\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)} + \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(Y)} \geq \max\{\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X+Y)}, \sqrt{I_{A.B}^{(g,f)}(X-Y)}\}.$

Proof (1) Hilbert-Schmidt norm $\|\cdot\|$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|X\|^2+\|Y\|^2 &= \frac{1}{2}(\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2)\\ &\geq \frac{1}{2}\max\{\|X+Y\|^2,\|X-Y\|^2\}.\end{aligned}$$

$I_{A,B}^{(g,f)}(X,X)$ は Hilbert-Schmidt norm の 2 乗であるので，$\|X\|=\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)}$. したがって上の不等式に代入すれば結論が得られる.
(2) 一般のノルムで成り立つ三角不等式を $\|X\|=\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)}$ に対して適用すればよい. □

Theorem 3.2 $\{X_i\}_{i=1}^N,\{Y_j\}_{j=1}^N\in M_n(\mathbb{C}),A,B\in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して $X_i^*|L_A-R_B|Y_j=\delta_{ij}C$ と条件 *(B)* が満たされるとき，次が成り立つ.

(1) $$\left(\sum_{i=1}^N U_{A,B}^{(g,f)}(X_i)\right)\left(\sum_{j=1}^N U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j)\right)\geq Nk\ell|Tr[C]|^2.$$

(2) $$\left(\sum_{i=1}^N \sqrt{U_{A,B}^{(g,f)}(X_i)}\right)\left(\sum_{j=1}^N \sqrt{U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j)}\right)\geq N\sqrt{k\ell}|Tr[C]|.$$

Proof (1) 定理 2.1(2)(a) より

$$U_{A,B}^{(g,f)}(X_i)\cdot U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j)\geq k\ell|Tr[X_i^*|L_A-R_B|Y_j]|^2. \tag{1}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^N U_{A,B}^{(g,f)}(X_i)\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^N U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j)\right)\\ \geq\ & \sum_{i,j}k\ell|Tr[X_i^*|L_A-R_B|Y_j]|^2=\sum_{i,j}k\ell|Tr[\delta_{ij}C]|^2=\sum_{i=1}^N k\ell|Tr[C]|^2=Nk\ell|Tr[C]|^2.\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\sqrt{U_{A,B}^{(g,f)}(X_i)}\cdot\sqrt{U_{A,B}^{(g,f)}(Y_j)}\geq N\sqrt{k\ell}|Tr[X_i^*|L_A-R_B|Y_j]|.$$

したがって (1) と同様にして結論が得られる. □

Theorem 3.3 $\{X_i\}_{i=1}^N\in M_n(\mathbb{C}),A,B\in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

(1) $$\sum_{i=1}^{N} I_{A,B}^{(g,f)}(X_i) \geq \frac{1}{N-2} \sum_{1\leq i<j\leq N} I_{A,B}^{(g,f)}(X_i+X_j) - \frac{1}{(N-1)^2(N-2)}\left(\sum_{i<j}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i+X_j)}\right)^2$$

(2) $$\sum_{i=1}^{N} \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)} \geq \frac{1}{N-2}\left(\sum_{i<j}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i+X_j)} - \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)}\right)$$

$$\geq \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i+X_j)}$$

$$\geq \max\left\{\frac{1}{N-2}\left(\sum_{i<j}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i+X_j)} - \sum_{i=1}^{N}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)}\right), \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(\sum_{i=1}^{N} X_i)}\right\},$$

(3) $$\frac{1}{N(N-1)^2}\left\{\left(\sum_{i<j}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i+X_j)}\right)^2 + \left(\sum_{i<j}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i-X_j)}\right)^2\right\}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{i<j} I_{A,B}^{(g,f)}(X_i-X_j) + \frac{1}{N(N-1)^2}\left(\sum_{i<j}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i+X_j)}\right)^2$$

これらの不等式を証明するには次の Lemma を用いればよい．

Lemma 3.1 *Hilbert-Schmidt norm* $\|\cdot\|$ を $M_n(\mathbb{C})$ 上の *norm* とすると，$\{A_i\}_{i=1}^N \subset M_n(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ．

(1) $$\|\sum_{i=1}^{N} A_i\| \leq \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i+A_j\| \leq \sum_{i=1}^{N}\|A_i\|$$

(2) $\|\sum_{i=1}^N A_i\| + (N-2)\sum_{i=1}^N \|A_i\| \geq \sum_{i<j}\|A_i+A_j\|$

(3) $$\frac{1}{N-2}\sum_{i<j}\|A_i+A_j\| - \frac{1}{N-2}\|\sum_{i=1}^{N} A_i\| \geq \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i+A_j\|$$

$$\geq \max\left\{\frac{1}{N-2}\sum_{i<j}\|A_i+A_j\| - \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|, \|\sum_{i=1}^{N}A_i\|\right\}$$

(4) $\|\sum_{i=1}^{N}A_i\|^2 + (N-2)\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2 = \sum_{i<j}\|A_i+A_j\|^2$

(5) $\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2 \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{i<j}\|A_i-A_j\|^2 + \left(\frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i+A_j\|\right)^2\right)$

(6) $\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2 \geq \frac{1}{N}\left\{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i+A_j\|\right)^2 + \left(\frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i-A_j\|\right)^2\right\}$

Proof (1) 一般に $\{x_i\}_{i=1,\cdots,N} \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}x_i &= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N}x_i + \sum_{j=1}^{N}x_j) = \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i+x_j) \\
&= \frac{1}{2N}\{2\sum_{i=1}^{N}x_i + \sum_{i\neq j}(x_i+x_j)\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i + \frac{1}{2N}\{\sum_{i<j}(x_i+x_j) + \sum_{i>j}(x_i+x_j)\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i + \frac{1}{N}\sum_{i<j}(x_i+x_j).
\end{aligned}$$

よって

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}x_i = \frac{1}{N}\sum_{i<j}(x_i+x_j).$$

したがって

$$\sum_{i=1}^{N}x_i = \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}(x_i+x_j).$$

ここで $x_i = \|A_i\|,\ i=1,2,\cdots,N$ とすると

$$\sum_{i=1}^{N}\|A_i\| = \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}(\|A_i\|+\|A_j\|) \geq \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i+A_j\|.$$

またノルムを両辺のそれぞれ全体にとると

$$\|\sum_{i=1}^{N}A_i\| = \|\frac{1}{N-1}\sum_{i<j}(A_i+A_j)\| \leq \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i+A_j\|.$$

この２式を合わせると (1) が得られる．
(2) Hlawka's inequality より明らか． ([12], [9])
(3) (1) の $\|\sum_{i=1}^{N} A_i\| \leq \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i + A_j\| \leq \sum_{i=1}^{N}\|A_i\|$ より明らか．
(4) $\|A_i + A_j\|^2 = \langle A_i + A_j | A_i + A_j\rangle = \|A_i\|^2 + \langle A_i|A_j\rangle + \langle A_j|A_i\rangle + \|A_i\|^2$ より

$$\sum_{i,j}\|A_i + A_j\|^2 = N\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2 + 2\sum_{i,j}\langle A_i|A_j\rangle + N\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2.$$

また

$$\sum_{i,j}\|A_i + A_j\|^2 = 4\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2 + 2\sum_{i<j}\|A_i + A_j\|^2.$$

上の２つの等式より

$$\sum_{i<j}\|A_i + A_j\|^2 = (N-2)\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2 + \|\sum_{i=1}^{N}A_i\|^2.$$

(5) (4) と同様な等式より

$$\sum_{i<j}\|A_i - A_j\|^2 = N\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{N}A_i\|^2.$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2 &= \frac{1}{N}\left(\sum_{i<j}\|A_i - A_j\|^2 + \|\sum_{i=1}^{N}A_i\|^2\right)\\ &\leq \frac{1}{N}\left(\sum_{i<j}\|A_i - A_j\|^2 + \left(\frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i + A_j\|\right)^2\right).\end{aligned}$$

(6) $\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i<j}\|A_i \pm A_j\|^2 \geq \left(\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i<j}\|A_i \pm A_j\|\right)^2$ すなわち

$$\sum_{i<j}\|A_i \pm A_j\|^2 \geq \frac{2}{N(N-1)}\left(\sum_{i<j}\|A_i \pm A_j\|\right)^2.$$

したがって

$$\sum_{i=1}^{N}\|A_i\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(N-1)}\left\{\sum_{i<j}\|A_i+A_j\|^2+\sum_{i<j}\|A_i-A_j\|^2\right\} \\
&\geq \frac{1}{N}\left\{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i+A_j\|\right)^2+\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\|A_i-A_j\|\right)^2\right\}.
\end{aligned}
$$

□

Theorem 3.4 $\{X_i\}_{i=1}^N \in M_n(\mathbb{C}), A, B \in M_{n,+}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

(1) $$\sum_{i=1}^N \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)} \leq \frac{\sqrt{2}}{N-1}\sum_{i<j}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i \pm X_j)}$$

$$\left\{\frac{\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)I_{A,B}^{(g,f)}(X_j)}}{\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)I_{A,B}^{(g,f)}(X_j)} \pm \mathrm{Re}\left\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X_i,X_j)\right\}}\right\}^{1/2}.$$

(2) $$\sum_{i=1}^N I_{A,B}^{(g,f)}(X_i) \leq \frac{2}{N-1}\sum_{i<j}\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)I_{A,B}^{(g,f)}(X_j)}$$

$$\left\{\frac{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i \pm X_j)}{\sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X_i)I_{A,B}^{(g,f)}(X_j)} \pm \mathrm{Re}\left\{\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X_i,X_j)\right\}} - 1\right\}.$$

Proof (1) 便宜上 $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$\Gamma_{A,B}^{(g,f)}(X,Y) = \langle X, Y\rangle, \quad \sqrt{I_{A,B}^{(g,f)}(X)} = \|X\|$$

と書くことにする. このとき

$$\left\|\frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|}\right\| = \sqrt{2}\sqrt{1 \pm \frac{\mathrm{Re}\langle X_i, X_j\rangle}{\|X_i\|\|X_j\|}}$$

と Dunkl-Williams inequality

$$\|X_i\| + \|X_j\| \leq \frac{2\|X_i \pm X_j\|}{\left\|\frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|}\right\|}$$

より

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\|X_i\| &= \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}(\|X_i\|+\|X_j\|) \\
&\leq \frac{2}{N-1}\sum_{i<j}\frac{\|X_i \pm X_j\|}{\|\frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|}\|} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{N-1}\sum_{i<j}\frac{\|X_i \pm X_j\|}{\sqrt{1 \pm \frac{\mathrm{Re}\langle X_i, X_j\rangle}{\|X_i\|\|X_j\|}}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{N-1}\sum_{i<j}\frac{\|X_i \pm X_j\|\sqrt{\|X_i\|\|X_j\|}}{\sqrt{\|X_i\|\|X_j\| \pm \mathrm{Re}\langle X_i, X_j\rangle}}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\|\frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|}\|^2 = 2\left\{1 \pm \frac{\mathrm{Re}\langle X_i, X_j\rangle}{\|X_i\|\|X_j\|}\right\}
$$

と Dunkl-Williams inequality の 2 乗した不等式

$$
\|X_i\|^2 + \|X_j\|^2 \leq \frac{4\|X_i \pm X_j\|^2}{\|\frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|}\|^2} - 2\|X_i\|\|X_j\|
$$

より次を得る.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\|X_i\|^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}(\|X_i\|^2+\|X_j\|^2) \\
&\leq \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\left\{\frac{4\|X_i \pm X_j\|^2}{\|\frac{X_i}{\|X_i\|} \pm \frac{X_j}{\|X_j\|}\|^2} - 2\|X_i\|\|X_j\|\right\} \\
&= \frac{1}{N-1}\sum_{i<j}\left\{\frac{2\|X_i \pm X_j\|^2}{1 \pm \frac{\mathrm{Re}\langle X_i, X_j\rangle}{\|X_i\|\|X_j\|}} - 2\|X_i\|\|X_j\|\right\} \\
&= \frac{2}{N-1}\sum_{i<j}\|X_i\|\|X_j\|\left\{\frac{\|X_i \pm X_j\|^2}{\|X_i\|\|X_j\| \pm \mathrm{Re}\langle X_i, X_j\rangle} - 1\right\}.
\end{aligned}
$$

□

Remark 3.1 *Theorem 3.3* の *(3)*, および *Theorem 3.4* の *(1), (2)* は和型不確定性関係の逆不等式と考えることができる.

Acknowledgement
The author was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 26400119.

References

[1] Bin Chen and Shao-Ming Fei, Sum uncertainty relations for arbitrary N incompatible observables, *Scientific Reports*, **5**(2015),14238-1-6.

[2] Bin Chen, Shao-Ming Fei and Gui-Lu Long, Sum uncertainty relations based on Wigner-Yanase skew information, *Quantum Information Processing*, **15**(2016), 2639-2648.

[3] Ya-Jing Fan, Huai-Xin Cao, Hui-Xian Meng and Liang Chen, An uncertainty relation in terms of generalized metric adjusted skew information and correlation measure, *Quantum Inf. Process.* DOI 10.1007/s11128-016-1419-4, (2016).

[4] P.Gibilisco, D.Imparato and T.Isola, Uncertainty principle and quantum Fisher information, II, *J. Math. Phys.*, **48**(2007), 072109.

[5] P.Gibilisco, F.Hansen and T.Isola, On a correspondence between regular and non-regular operator monotone functions, *Linear Algebra and its Applications*, **430**(2009), 2225-2232.

[6] P.Gibilisco, F.Hiai and D.Petz, Quantum covariance, quantum Fisher information, and the uncertainty relations, *IEEE Trans. Information Theory*, **55**(2009), 439-443.

[7] P.Gibilisco and T.Isola, On a refinement of Heisenberg uncertainty relation by means of quantum Fisher information, *J. Math. Anal. Appl.*, **375**(2011), 270-275.

[8] F.Hansen, Metric adjusted skew information, *Proc. Nat Acad. Sci.*, **105**(2008), 9909-9916.

[9] A.Honda, Y.Okazaki and Y.Takahashi, Generalizations of the Hlawka's inequality, *Bull.Kyushu. Inst. Tech., Pure Appl. Math.*, **45**(1998), 9-15.

[10] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.*, **246**(1980), 205-224.

[11] Lorenzo Maccone and Arun K. Pati, Stronger uncertainty relations for all incompatible observables, *Physical Review Letters*, **113**(2014), 260401-1-5.

[12] D.S.Mitrinović, J.E.Pečarić and A.M.Fink, Classical and new inequalities in analysis, Kluwer Academic Publishers.

[13] D.Petz, Monotone metrics on matrix spaces, *Linear Algebra and its Applications*, **244**(1996), 81-96.

[14] D.Petz and H.Hasegawa, On the Riemannian metric of α-entropies of density matrices, *Lett. Math. Phys.*, **38**(1996), 221-225.

[15] H.P.Robertson, The uncertainty principle, *Phys. Rev.*, **34**(1929), 163-164.

[16] E.Schrödinger, About Heisenberg uncertainty relation, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **49**(1963), 910-918.

[17] Yunlong Xiao, Naihuan Jing, Xianqing Li-Jost and Shao-Ming Fei, Weighted uncertainty relations, *Scientific Reports*, **6**(2016), 23201-1-9.

[18] K.Yanagi, Non-hermitian extension of uncertainty relation, *J.Nonlinear and Convex Analysis*, **17**(2016), 17-26.

[19] K.Yanagi, Generalized trace inequalities related to fidelity and trace distance, *Linear and Nonlinear Analysis*, **2**(2016), 263-270.

[20] K.Yanagi, Some generalizations of non-hermitian uncertainty relation described by the generalized quasi-metric adjusted skew information, *Linear and Nonlinear Analysis*, **3**(2017), 343-348.

Department of Mathematics
Faculty of Science
Josai University
Sakado, 350-0295, Japan
e-mail:yanagi@josai.ac.jp

城西大学理学部数学科
柳　研二郎